

Экономико-математическое моделирование и его применение.

Бируля И.О. Пензенский государственный университет

В статье рассматривается суть экономико-математического моделирования, правила составления моделей, пример применения экономико-математического моделирования.

Моделирование в научных исследованиях стало применяться еще в глубокой древности и постепенно захватывало все новые области научных знаний: техническое конструирование, строительство и архитектуру, астрономию, физику, химию, биологию и, наконец, общественные науки. Большие успехи и признание практически во всех отраслях современной науки принес методу моделирования XX в. Однако методология моделирования долгое время развивалась независимо отдельными науками. Отсутствовала единая система понятий, единая терминология. Лишь постепенно стала осознаваться роль моделирования как универсального метода.

Термин "модель" широко используется в различных сферах человеческой деятельности и имеет множество смысловых значений. Рассмотрим только такие "модели", которые являются инструментами получения знаний.

Модель - это такой материальный или мысленно представляемый объект, который в процессе исследования замещает объект-оригинал так, что его непосредственное изучение дает новые знания об объекте-оригинале.

Можно выделить основные свойства модели: *Простота. Полнота. Адекватность.*

Простота: проста в понимании, простота математического аппарата, не отягощенного лишними переменными, которые слабо влияют на развитие экономической системы (Все гениальное – просто).

Полнота: включение всех факторов, влияющих на достижение цели, учет всех условий, которые ограничивают развитие системы. Имеется возможность получить ответ на все вопросы, поставленные в задаче.

Адекватность: возможность достижения цели с приемлемой точностью.

Под моделированием понимается процесс построения, изучения и применения моделей. Оно тесно связано с такими категориями, как абстракция, аналогия, гипотеза и др. Процесс моделирования обязательно включает построение абстракций, умозаключения по аналогии и конструирование научных гипотез.

Главная особенность моделирования в том, что это метод опосредованного познания с помощью объектов-заместителей. Модель выступает как своеобразный инструмент познания, который исследователь ставит между собой и объектом и с помощью которого изучает интересующий его объект. Именно эта особенность метода моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Необходимость использования метода моделирования определяется тем, что многие объекты (или проблемы, относящиеся к этим объектам) непосредственно исследовать или вовсе невозможно, или же это исследование требует много времени и средств.

Процесс моделирования включает три элемента:

- 1) субъект (исследователь),
- 2) объект исследования,
- 3) модель, опосредствующую отношения познающего субъекта и познаваемого объекта.

Пусть имеется или необходимо создать некоторый объект А. Мы конструируем (материально или мысленно) или находим в реальном мире другой объект В - модель объекта А. Этап построения модели предполагает наличие некоторых знаний об объекте-оригинале. Познавательные возможности модели обуславливаются тем, что модель отражает какие-либо существенные черты объекта-оригинала. Вопрос о необходимости и достаточной мере сходства оригинала и модели требует конкретного анализа. Очевидно, модель утрачивает свой смысл как в случае тождества с оригиналом (тогда она перестает быть оригиналом), так и в случае чрезмерного во всех существенных отношениях отличия от оригинала. Таким образом, изучение одних сторон моделируемого объекта осуществляется ценой отказа от отражения других сторон. Поэтому любая модель замещает оригинал лишь в строго ограниченном смысле. Из этого следует, что для одного объекта может быть построено несколько "специализированных" моделей, концентрирующих внимание на определенных сторонах исследуемого объекта или же характеризующих объект с разной степенью детализации.

На втором этапе процесса моделирования модель выступает как самостоятельный объект исследования. Одной из форм такого исследования является проведение "модельных" экспериментов, при которых сознательно изменяются условия функционирования модели и систематизируются данные о ее "поведении". Конечным результатом этого этапа является множество знаний о модели R.

На третьем этапе осуществляется перенос знаний с модели на оригинал - формирование множества знаний S об объекте. Этот процесс переноса знаний проводится по определенным правилам. Знания о модели должны быть скорректированы с учетом тех свойств объекта-оригинала, которые не нашли отражения или были изменены при построении модели. Мы можем с достаточным основанием переносить какой-либо результат с модели на оригинал, если этот результат необходимо связан с признаками сходства оригинала и модели. Если же определенный результат модельного исследования связан с отличием модели от оригинала, то этот результат переносить неправомерно.

Четвертый этап - практическая проверка получаемых с помощью моделей знаний и их использование для построения обобщающей теории объекта, его преобразования или управления им.

Для понимания сущности моделирования важно не упускать из виду, что моделирование - не единственный источник знаний об объекте. Процесс моделирования "погружен" в более общий процесс познания. Это обстоятельство учитывается не только на этапе построения модели, но и на завершающей стадии, когда происходит объединение и обобщение результатов исследования, получаемых на основе многообразных средств познания.

Моделирование - циклический процесс. Это означает, что за первым четырехэтапным циклом может последовать второй, третий и т.д. При этом знания об исследуемом объекте расширяются и уточняются, а исходная модель постепенно совершенствуется. Недостатки, обнаруженные после первого цикла моделирования, обусловленные малым знанием объекта и ошибками в построении модели, можно исправить в последующих циклах. В методологии моделирования, таким образом, заложены большие возможности саморазвития.

Моделирование экономических процессов - это часть области применения математических методов и моделей в анализе, планировании, организации и управлении народным хозяйством. Оно представляет собой сложную работу, состоящую из ряда последовательных и взаимосвязанных этапов на стадиях:

- а) постановки задачи,
- б) построения формализованной схемы,
- в) построения модели,
- г) исследование модели,
- д) проверки модели и оценки решения,
- е) внедрения решения и контроля его правильности.

При разработке экономико-математических моделей необходимо соблюдать следующие основные требования:

- 1) модель должна базироваться на строго научной экономической теории, раскрывающей категории и закономерности данной формации;
- 2) модель должна отображать реальную структуру моделируемого процесса или объекта в соответствии с принципом структурного подобия (изоморфизма);
- 3) в модели должно быть обеспечено единство масштаба и соблюдено соответствие размерностей экономических величин;
- 4) в модели должно проводиться принципиальное различие между управляемыми, полууправляемым и неуправляемыми параметрами;
- 5) модель должна удовлетворять условиям, определяющим степень ее соответствия объекту и границы применимости.

Рассмотрим применение экономико-математической модели на примере модели «инфляция и безработица».

Наиболее широко используемой концепцией в анализе проблемы инфляции и безработицы является соотношение Филлипса, которое устанавливает связь между темпом роста зарплаты и темпом роста безработицы $\tilde{w} = f(U)$, ($f'(U) < 0$), где $\tilde{w}$ - темп роста зарплаты ($\tilde{w} = \dot{W}/W$), U — темп роста безработицы.

Введем обозначения для роста инфляции, т.е. темпа роста уровня цен, в виде $p = \dot{P}/P$, а производительность труда обозначим через T . Тогда будем иметь $p = \tilde{\omega} - T$. Считая, что уменьшение зарплаты происходит линейно в зависимости от роста безработицы, т.е. $\tilde{\omega} = f(U) = \alpha - \beta U$, имеем так называемое адаптированное соотношение Филлипса:

$$p = (\alpha - \beta U) - T, \quad (\alpha, \beta > 0). \quad (1)$$

Позднее экономисты предпочли использовать другую форму соотношения Филлипса, получаемую при предположении, что темп роста зарплаты изменяется как $\tilde{\omega} = f(U) + h\pi$, где $0 < h \leq 1$, а посредством π обозначен ожидаемый рост инфляции.

Тогда вместо соотношения (1) получим следующий вариант соотношения Филлипса:

$$p = \alpha - \beta U - T + h\pi, \quad (\alpha, \beta > 0). \quad (2)$$

Примем гипотезу об ожидаемом темпе инфляции в виде:

$$\frac{d\pi}{dt} = j \cdot (p - \pi), \quad 0 < j \leq 1. \quad (3)$$

Обозначая теперь номинальный денежный баланс через M и темп его возрастания через $m = \dot{M}/M$, постулируем, что

$$\frac{dU}{dt} = -k \cdot (m - p), \quad (k > 0). \quad (4)$$

где разность $m - p = \frac{\dot{M}}{M} - \frac{\dot{P}}{P}$ представляет собой темп роста реальных денег.

Рассматриваемые совместно уравнения (2)–(4) описывают закрытую модель «инфляция — безработица» с тремя переменными (неизвестными) π, p, U .

Ввиду того, что три неизвестные связаны соотношением (2), можно записать систему двух уравнений с двумя неизвестными. Подставив (2) в (3) и (4) и приведя подобные члены, получим систему:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\pi}{dt} &= j \cdot (h-1) \cdot \pi - j\beta U + j \cdot (\alpha - T) \\ \frac{dU}{dt} &= kh\pi - k\beta U + k \cdot (\alpha - T - \beta) \end{aligned} \right\}. \quad (5)$$

Далее, если мы продифференцируем по t первое из уравнений системы (5) и подставим затем в полученное выражение производные $\frac{dU}{dt}, \frac{d\pi}{dt}$ опять же из системы (5), то после очевидных упрощений получим одно дифференциальное уравнение второй степени и с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2\pi}{dt^2} + (\beta k + j \cdot (1-h)) \frac{d\pi}{dt} + (j\beta k) \cdot \pi = j\beta km, \quad (6)$$

Последнее уравнение с точностью до обозначений совпадает с уравнением $\frac{d^2 y}{dt^2} + 2k \cdot \frac{dy}{dt} + \omega^2 y = a$, (где k - коэффициент упругой пропорциональности; ω - частота колебания), которое описывает колебания маятника при наличии сопротивления среды и постоянной по величине возмущающей силы. Найдем общее решение дифференциального уравнения (6), которое состоит из общего решения однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2 \pi}{dt^2} + (\beta k + j \cdot (1 - h)) \frac{d\pi}{dt} + (j\beta k) \cdot \pi = 0, \quad (7)$$

и частного решения неоднородного дифференциального уравнения (6), в качестве которого очевидно следует взять $\pi = m$.

Характеристическое уравнение дифференциального уравнения (7) имеет вид:

$$\lambda^2 + (\beta k + j \cdot (1 - h)) \cdot \lambda + jk\beta = 0, \quad (8)$$

корни которого равны $\lambda_{1,2} = -k_1 \pm k_2 i$, $i = \sqrt{-1}$,

$$k_1 = \frac{1}{2}(\beta k + j \cdot (1 - h)), \quad k_2 = \sqrt{jk\beta - k_1^2}, \quad jk\beta > k_1^2.$$

В результате общее решение дифференциального уравнения (6) примет вид

$$\pi(t) = e^{-k_1 t} (C_1 \cos k_2 t + C_2 \sin k_2 t) + m. \quad (9)$$

Простой анализ полученной зависимости показывает, что при $t \rightarrow \infty$ ожидаемый темп инфляции π выходит на стационарный режим, при котором он становится равным m , т.е. темпу роста номинального денежного баланса.

Полученное выражение (9) вместе с соотношением Филлипса (1) позволит экономистам более детально изучить колебания в динамической модели «инфляция — безработица», поскольку колебания математического маятника, которому, как мы убедились, она соответствует, полностью изучены и описаны во многих учебниках.

Вот так путём не хитрых аналогий была связана модель математического маятника с моделью «инфляция-безработица».

В заключении хотелось бы отметить, что в экономике многие процессы являются массовыми; они характеризуются закономерностями, которые не обнаруживаются на основании лишь одного или нескольких наблюдений. Поэтому моделирование в экономике должно опираться на массовые наблюдения.

Литература:

1. Дифференциальные уравнения. Сборник задач. С.Г. Журавлёв, В.В. Аниковский. Москва: «Экзамен», 2005. – 127 с.
2. Справочник по высшей математике. М.Я. Выгодский. Москва: «Наука», 1975. – 872 с.
3. Справочник по физике. Законы и формулы физики. В.Е. Кузмичев. Киев: «Наукова думка», 1989. - 864 с.
4. Экономико-математическое моделирование. Колемаев В.А. Москва: «Юнити-Дана», 2005. — 295 с.
5. Экономико-математические методы и модели в управлении производством. Пелих А.С., Терехов Л.Л., Терехова Л.А. Ростов-на-Дону: «Феникс», 2005. — 248 с.